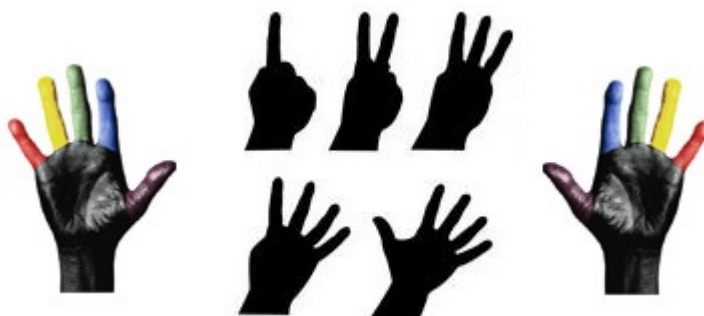


Comptar: història



Taula

Els orígens: de la marca al nombre	2
Ordenar elements o quantificar-los?	2
L'abstracció del nombre	6
Molts "un, dos, tres...molts"	7
Abans de les paraules-nombre: el gest	8
Després del gest: la paraula-gest.....	10
Nom dels nombres: les icones	12
Més paraules per comptar més i millor.....	13
La base.....	15
Noms additius	15
La multiplicació entra en joc	17
Fem més curts els noms llargs: les potències	18
La resta també vol jugar	20
La divisió	22
Algunes rareses	22
En català, si us plau	22
L'origen dels nostres numerals	24
Inventem una manera de formar els numerals.....	26
Resum.....	28

Els orígens: de la marca al nombre

Anteriorment hem vist que tant els animals com les persones som capaços de diferenciar petites quantitats d'un sol cop d'ull, però que aquesta facultat no acostuma a anar més enllà dels quatre o cinc elements. Si ens cal comparar quantitats superiors o necessitem recordar-les (per fer un cens, un inventari o recordar un cicle, com als calendaris) haurem de recórrer a mètodes com el de fer marques (una marca - un element) establint una correspondència biunívoca entre el conjunt de marques i el d'elements a controlar (eines, animals, dies...). Aquests mètodes, senzills però eficaços en determinats nivells de desenvolupament tecnològic i social, es mostren insuficients a mesura que aquest mateix desenvolupament exigeix solucionar qüestions més complexes com, per exemple, mesurar una quantitat i recordar la seva mesura. Mesurar una quantitat implica quantificar-la: assignar una cardinalitat a un conjunt d'elements. No volem ja saber només si tenim "tants com", "més que" o "menys que" sinó determinar *quants* en tenim.

El procés per passar de les marques al recompte, com veurem, no va ser tant fàcil i la diversitat de solucions trobades per la humanitat al llarg del temps i arreu del món ha estat molt gran. A més l'acció de comptar comporta l'aparició d'una nova eina: el nombre. Així ho resumeix Denis Guedj (1998:15):

"Ja que no era possible copsar la quantitat directament amb la vista, es van inventar els nombres. I amb ells es va començar a comptar. Per a conservar les empremtes de la quantitat es van fer les marques. Es va posar nom a les marques i es van memoritzar els noms donats."

Ordenar elements o quantificar-los?

Una de les preguntes més freqüents que es fan els historiadors de les matemàtiques és com va aparèixer el nombre en primera instància, si com a *cardinal* o com a *ordinal*. Vegem primer, però, el significat de cada paraula i comparem les seves característiques.

• Cardinals, cardinalitat

La paraula *cardinal* prové del adjectiu llatí *cardinàlis* i aquesta de *càrdo* (frontissa, pivot, punt sobre el que gira alguna cosa). *Cardinàlis* així significaria "relatiu als pivots", però més exactament, agafant el darrer significat donat a *càrdo*, voldria dir "principal". D'aquesta manera podríem interpretar l'origen de la paraula *cardinal* com a "principal", fonamental, "que serveix com a eix o referència". Pel que sabem, el gramàtic del segle VI Priscià de Cessàrea va anomenar als nombres naturals *cardinàles númeri* (Palacios, Álvarez, Argerami, 1995).

El concepte matemàtic de cardinal, però, ha variat amb el temps. Al diccionari de la Llengua Catalana (Enciclopèdia Catalana, 1994) trobem aquestes definicions:

1. D'una importància fonamental
2. Adjectiu numeral que indica una quantitat precisa
3. Cardinalitat

Si mirem al mateix diccionari la paraula *cardinalitat* trobarem: "Qualitat que un conjunt té en comú amb altres conjunts que s'hi poden posar en correspondència bijectiva".

Tot i que amb un estil ben diferent la definició matemàtica de cardinalitat d'un conjunt també es refereix a que ens indica la quantitat d'elements que el formen.¹

Resumint, entendrem el significat de *cardinal* com la denotació d'una quantitat.

• Ordinals

Algunes de les definicions que trobem al Diccionari de la Llengua Catalana són:

1. Número d'ordre d'un element en una successió
2. Adjectiu numeral que indica el lloc que alguna cosa ocupa dins d'una sèrie.

Les definicions matemàtiques són força més complexes i fan referència, com en el cas dels cardinals, a la teoria de conjunts². El significat, però, que donarem al terme *ordinal* en aquest text el trobem a l'entrada corresponent a la *wikipedia*: "És un nombre que denota la posició d'un element que pertany a una sèrie ordenada. Per exemple, a la successió a, b, c, d , l'element a és el *primer*, b el *segon*, c el *tercer*, etc."

• Comparem cardinals i ordinals

En certa manera, pel que hem vist, podem pensar que el nombre cardinal neix de l'aparellament, de l'establiment de correspondències. Quan les establim no ens cal tenir en compte cap ordre. En canvi amb els ordinals torna a aparèixer l'aparellament però ens interessa més la successió. Amb un exemple molt clar que

¹ La que proposa el Diccionari Oxford de Matemàtiques (1992) és la següent:

"En un conjunt finit A , la cardinalitat d' A , que es denota $n(A)$, és el nombre d'elements d' A . També s'utilitzen les anotacions $\#(A)$ o $|A|$. Per a conjunts A, B , i C d'un conjunt universal E ,

(i) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$,

(ii) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$ "

² A Córdoba (2006) trobem aquesta definició del mot *ordinal* atribuïda a Cantor i millorada per Von Neumann (dos pesos pesants de les matemàtiques del passat segle):

"Un conjunt α és un nombre ordinal si i només si té les propietats següents:

$P_1(\alpha)$: Si $\beta \in \alpha$ llavors $\beta \subset \alpha$.

$P_2(\alpha)$: $[(\beta \in \alpha) \cap (\gamma \in \alpha)] \Rightarrow [(\beta = \gamma) \cup (\beta \in \gamma) \cup (\gamma \in \beta)]$

$P_3(\alpha)$: Si $\emptyset \neq A \subset \alpha$, llavors existeix $\gamma \in A$ tal que $\gamma \cap A = \emptyset$ "

Això significa, per exemple, que el conjunt ordinal 4, està format pels elements $\{0,1,2,3\}$. El subconjunt ordinal 2 està format pels elements $\{0,1\}$ que també és un subconjunt de 4. Els elements estan ordenats així $0 < 1 < 2 < 3$ de tal manera que un nombre natural és més petit que un altre si és element de l'altre.

Convé, potser, també incloure alguna definició d'ordre. Una de les dues que ens proposa A. Córdoba (2006) és la següent:

"Un ordre és una relació que aconsegueix les propietats:

i) Reflexiva. $xRx, \forall x \in X$

ii) Antisimètrica. $(xRy) \cap (yRx) \Rightarrow x = y$

iii) Transitiva. $(xRy) \cap (yRz) \Rightarrow (xRz)$ "

ens proposa Ifrah (1997) no és el mateix dir que gener té 31 dies (cardinal) que som al 31 de gener (ordinal).

El llenguatge (i a aquest tema tornarem més tard) acostuma a diferenciar els dos tipus de nombres:

Nombre	Cardinal	Ordinal	Nombre	Cardinal	Ordinal
1	U	Primer	6	Sis	Sisè
2	Dos	Segon	7	Set	Setè
3	Tres	Tercer	8	Vuit	Vuitè
4	Quatre	Quart	9	Nou	Novè
5	Cinc	Cinquè	10	Deu	Desè

Podem observar, com a curiositat, que els casos de l'1 i el 2 no tenen semblança fonètica entre el cardinal i l'ordinal, cosa que sembla passar a moltes llengües.

Un exemple en el que la l'alteració de la paraula és mínima és a la llengua *kiliwa* (Baixa Califòrnia). Tots els ordinals es formen afegint el sufix **u'** als cardinals.

Nombre	Cardinal	Ordinal
1	Msíg	Msíg u'
2	Juwak	Juwak u'
3	Jmi'k	Jmi'k u'
4	Mnak	Mnak u'
5	Salchipam	Salchipam u'
6	Msígl paayp	Msígl paayp u'
7	Juwakl paayp	Juwakl paayp u'
8	Jmi'kl paayp	Jmi'kl paayp u'
9	Msíg tkmat	Msíg tkmat u'
10	Chipam msíg	Chipam msíg u'

L'ordinal té un caràcter més indicatiu que no pas el cardinal que, més aviat, denota una propietat.

"La diferència entre un ordinal i un cardinal és que el primer és un veritable atribut d'allò al que es refereix, mentre que el segon defineix només una propietat fortuïta. Aquesta distinció pot aclarir-se mitjançant un exemple: suposem que un home té cinc fills i els tres més grans estan presents a una habitació. Llavors, si entra un quart fill el cardinal «tres» senzillament desapareix, mentre que la categoria del tercer fill segons l'edat no es veu alterada en absolut. El cardinal «tres» no depèn de cap principi d'ordenació; per exemple, no es veuria afectat si el primer fill marxés de l'habitació per ser substituït pel cinquè."

T. Crump (1993:75)

Una altra diferència important entre els cardinals i els ordinals és l'ús que se'n fa. Els cardinals, a més indicar una propietat (la cardinalitat) es poden utilitzar per fer operacions, càlculs, mentre que els ordinals no³. No té sentit sumar "el segon" i "el quart" a no ser que parlem dels termes d'una sèrie numèrica. Així el cardinals tindrien un ús més sintàctic i els ordinals semàntic (T. Crump, 1993).

³ Lingüísticament es considera que els cardinals poden fer funcions de substantiu ("el set de copes"), adjectiu (set magranes) o pronom (agafa tres) i no tenen variacions de gènere (excepte l'u [un-una] i el dos [dos-dues]). Els ordinals poden ser substantius (el tercer de la promoció), adjectiu (el gos primer) i adverbi (primer va arribar Pep); tenen variacions de gènere i número.

• El problema de l'ordre

Per ordenar un conjunt el primer que necessitem és establir un criteri d'ordenació, un principi. Els criteris d'ordenació tenen característiques diferents als de classificació, entre altres coses perquè els elements que acostumem a ordenar solen ser elements de classes semblants sobre els que volem establir una nova organització en forma de successió: hi ha d'haver uns elements que han de precedir a uns altres. Les ordenacions més habituals, que més estem acostumats a fer, utilitzen criteris com la grandària (de gran a petit, de petit a gran...) o d'altres més arbitraris però acordats socialment, com pot ser l'ordre alfabètic.

No podem entendre la numeració sense un ordre que diferenciï quantitats progressivament més grans. Un conjunt amb cinc elements el considerem més gran que un de tres i, si els ordenem, el posarem després. El criteri que es va triar arreu va ser ordenar segons l'augment del nivell de complexitat: un és més senzill que dos (la unitat que la parella), dos ho és més que tres, tres que quatre... Sembla una solució comuna que apareix a qualsevol lloc on hi ha homes i dones que han començat a comptar. Fins a on s'ha arribat en aquest nivell de complexitat entra en el terreny de les necessitats tecnològiques de cada cultura. A partir de determinades quantitats, en cultures poc desenvolupades, no trobem tècniques per arribar-hi o per diferenciar-les. Què acabem de fer, doncs?: Ordenar els nombres cardinals. Però molts antropòlegs i historiadors de les matemàtiques defensen la teoria de que primer van aparèixer els ordinals: primer, segon, tercer... Encara que sembli contradictori ordenar els ordinals tampoc sempre és una feina senzilla. Mirem alguns exemples: el temps i l'espai.

- Ordenar en el temps sembla més fàcil donada la seva naturalesa unidireccional: *abans* és anterior a *després*. Però el temps té signes cíclics. La successió dia-nit, com tots els grups cíclics de dos elements, no es pot ordenar. Les preguntes com "què és anterior? El dia o la nit?" és del mateix nivell de "què va abans? L'ou o la gallina?". No té resposta. Però un cicle lunar, per exemple, és ordenable perquè té quatre elements: cadascuna de les seves fases. Tot i així, la qüestió *abans-després* sempre que parlem d'un cicle planteja dubtes d'algun tipus que només s'acostumen a resoldre per convencions socials. Per nosaltres el mes de febrer ve abans que el de març perquè sobreentenem que parlem del mateix any (el març d'aquest any és anterior al febrer del proper), però a l'antiga Roma el mes de març era el primer de l'any i febrer el darrer. Per tant març era anterior a febrer. Hem canviat una referència d'inici relacionada amb la natura (la primavera, el despertar de la vida) per un altre que ho està amb la religió (el naixement de Jesucrist). Podríem trobar exemples semblants amb els dies de la setmana: no és el dilluns el primer dia ja que no a totes les religions el dia destinat al culte és el diumenge.
- Ordenar en l'espai està encara més sotmès als convenis. Les convencions actuals fan predominar les direccions *esquerra-dreta* i *amunt-avall*. Aquest "acords" estan molt relacionats amb el sentit de lectura establert, però caldria preguntar-se també que és anterior: el sentit d'ordenació o el de lectura; qui és aquí l'ou i qui la gallina. Com bé sabem, no totes les escriptures estan d'acord amb la preponderància en el sentit horitzontal, en canvi sí que ho estan en el vertical. No tenim constància de cap escriptura que es faci verticalment de baix a dalt. Un altra vegada podem pensar en el nivell de complexitat: és menys accessible, i per tant més complex, un objecte col·locat en estrats superiors; ho són més, i en conseqüència menys complexos, els que ho estan en estrats inferiors.

•Ordinals-cardinals o cardinals-ordinals

Com hem avançat abans, les teories predominants apunten a que els ordinals van precedir als cardinals. Per avalar la teoria hauríem de pensar en quin problema es va plantejar la humanitat abans o quina observació va fer en primer lloc. La naturalesa cíclica dels fenòmens naturals fa pensar que la percepció de l'ordre ha de ser anterior a la del nombre (quan aquest va més enllà de cinc, com hem vist).

També hi ha autors que proposen un origen dels ordinals relacionat amb les celebracions rituals.

"S'ha suggerit que l'art de comptar va poder aparèixer en connexió amb certs rituals religiosos primitius i que l'aspecte ordinal va precedir al concepte quantitatiu. En els ritus cerimonials que escenifiquen els mites de la creació era necessari cridar els participants a escena en un orde precís i determinat, i potser la numeració es va inventar per a resoldre aquest problema. Si són correctes les teories de l'origen ritual de la numeració, llavors el concepte de número ordinal pot haver precedit al de número cardinal."

Boyer (1969, ed. 1999: 23)

Algunes reflexions ens poden portar a pensar, tanmateix, que els cardinals poden ser anteriors als ordinals. Com veurem després, hi hagut una fase del compteig en el que s'han assignat etiquetes als nombres: dos poden ser "ulls" i cinc "mà". Podem comptar alguns nombres a primera vista i agrupar-los de diverses formes (set: ulls-mà; deu: mà-mà...) sense preocupar-nos de si els *ulls* van abans que la *mà* o la *mà* que els *ulls*. En aquest cas els cardinals serien anterior als ordinals. Però, podríem anar molt lluny amb un sistema així? Tenim realment format del tot un concepte complet de nombre natural?

Si ho pensem, és pràcticament impossible comptar, ja sigui verbalment, ja sigui gestualment, sense seguir un ordre. És a dir, els passos que s'han de seguir per mesurar la cardinalitat d'un conjunt requereix abans un acord sobre la successió en que s'han de fer aquests passos. És impossible mesurar una quantitat (assignar el cardinal) si no seguim un ordre concret (primer, segon... o un, dos... o un dit, el dit del costat...). Això implicaria un naixement conjunt en el que el concepte d'ordre seria anterior però la numeració de l'ordre (ordinal) simultània a l'acció del recompte. Cardinal i ordinal serien, així, dues cares de la mateixa moneda. Una no existiria sense l'altra. Repetim una cita de T. Danzing recollida per Ifrah (1997:78):

"L'aparellament, per sí mateix, no pot crear el càlcul. Sense la nostra facilitat per disposar els éssers i els objectes segons la successió natural, poc progrés hauríem assolit. El nostre sistema numèric es troba profundament impregnat d'aquests dos principis: correspondència i successió, que constitueixen l'entrellat mateix de tota la matemàtica i de tots els dominis de les ciències exactes"

Hi tornem a ser: què és abans? l'ou o la gallina?

L'abstracció del nombre

A les illes Fiji la paraula que designa deu cocos és *koro* i la que determina deu barques és *bolo*. (Livio, 2006). A la llengua *nasioi* (Papua-Nova Guinea) hi ha fins a tretze variants de dir cadascun dels nombres de l'u al quatre segons els tipus d'elements que es comptin (Rauff, 2003).

Nasioi - Formes de dir "tres..."							
ocells	quadrúpedes	fruites	eines	dies	anys-mesos	arbres	...
<i>bekuri</i>	<i>bevoroi</i>	<i>bekupi</i>	<i>bevintu</i>	<i>bemuntu</i>	<i>beverapi</i>	<i>beveru</i>	...

El nombre va lligat a l'objecte. Aïllar el concepte de *cinc* de cinc antílops, cinc des-trals o cinc dits a cada mà va ser una de les grans primeres conquestes matemàtiques. Separar el que hi ha de comú en diferents conjunts i independitzar-lo del seu lligam concret (l'animal, l'eina, la part del cos) va ser, possiblement, un dels primers graons a superar en el camí cap a l'abstracció.

"En el decurs dels meus viatges encara no m'he trobat mai amb el número 2. Sí m'he creuat amb 2 ovelles i, segons els meus coneixements d'aquells moments, el seu comportament era consistent amb les propietats numèriques de l'esmentat nombre; però amb el nombre pròpiament dit, no m'he ensopegat mai. Hi ha certes propietats del món real que es poden descriure per mitjà de nombres; els nombres són construccions abstractes deduïdes del comportament d'aquell."

I. Stewart⁴

"... un (pot) arribar a adonar-se que alguns altres grups de coses, com són els parells, poden posar-se en correspondència biunívoca: les mans poden aparellar-se amb els peus, amb els ulls, amb les orelles o amb els forats del nas. Aquest reconeixement d'una propietat abstracta que tenen en comú certs grups, i a la que nosaltres anomenem nombre, representa ja una important etapa en el camí cap a la matemàtica moderna. És completament improbable que un descobriment com aquest hagi estat l'obra d'un home individual ni d'una única tribu; més probablement va haver de ser una mena de consciència gradual que es va poder haver produït dins del desenvolupament cultural humà tan tempra almenys com l'ús del foc, fa uns 400.000 anys probablement.

Boyer (1969, ed. 1999: 21)

Comptar (acció concreta) assigna un nombre (concepte abstracte) a una col·lecció (ens concret). Ens estem movent, d'una manera totalment inconscient, amunt i avall per l'escala de la concreció i de l'abstracció. Però no es pot arribar a un cert domini d'aquest moviment sense un període intermedi en el que es van superant determinades fases. Aquestes fases estan molt lligades al llenguatge. Cada nombre acostuma a tenir assignat una paraula. La construcció d'aquestes paraules ens ajuda a resseguir les fases del procés seguit per la humanitat per arribar a comptar fins a qualsevol quantitat imaginable.

Molts "un, dos, tres...molts"

Al voltant del 1940 l'etnòleg Lévi-Strauss va viure una temporada amb els indis *nambikwara*, pobladors d'un altiplà situat entre el Mato Grosso i Bolívia. En les seves descripcions posteriors de la vida d'aquests indis va afirmar que disposaven de paraules per l'u i el dos i d'una altra paraula per "molts". Combinant uns i dosos arribaven a comptar fins a vuit. (Campiglio, Eigeni, 1992). Casos com aquests s'han referit sovint en molts altres llibres d'història o divulgació matemàtica. En la majoria es parla de paraules referides a la unitat, la parella, la terna i la pluralitat més enllà de la terna (un, dos, tres...molts). Així ho trobem referit als indis *siriona* o *yanoama* (Seife, 2006), a la llengua *worora* d'Austràlia (Barriga F. a Alvarado, 2005), als *botocudos* del Brasil, als *aranda* i als també australians indígenes de les illes Murray o propers a l'estret de Torres... (Ifrah, 1997). En altres títols ho veiem explicat sense referents concrets. Però acostuma a haver-hi més mite que realitat en aquest fet. Està comprovat (i molt en els casos situats a la zona d'Oceania) que encara que el vocabulari no disposi de mots particulars pels nombres, moltes d'aquestes poblacions utilitzen sistemes alternatius per fer recomptes fins a nombres molt superiors a tres. Molts d'ells ajudant-se amb el propi cos, com veurem al següent apartat referit als casos de Papua-Nova Guinea. Fins i tot també s'ha observat que, mentre a nivell lingüístic nosaltres només diferenciem el singular del plural, els *anindilyakwa*, per exemple, fan servir quatre categories (singular-dual-

⁴ STEWART, IAN. (1977): *Conceptos de matemàtica moderna*. Alianza Universidad. Madrid. Pàgina 41.

trial-plural). (Bishop, 1999). En tot cas podem pensar com Crump (1993) que qual-sevol societat haurà fet desenvolupar el vocabulari dels numerals fins on li hagi calgut per les seves necessitats numèriques.

Tot i així és interessant destacar algunes disquisicions lingüístiques fetes per Ifrah (1997) al voltant de les paraules fonèticament semblants a “tres” i que són indicatives d’abundància o pluralitat.

Llengua	Tres	Paraules o prefixos
Francès	Trois	<ul style="list-style-type: none"> • très (molts) • trans (més enllà) • trop (massa) • troup (tropa)
Anglès	Three	<ul style="list-style-type: none"> • thrice (tres vegades i diversos) • throng (multitud) • through (més enllà)
Italià	Tre	<ul style="list-style-type: none"> • troppo (massa) • truppa (tropa)
Alemanys	Drei	<ul style="list-style-type: none"> • trupp (tropa)
Català-castellà	Tres	<ul style="list-style-type: none"> • tropa • trans

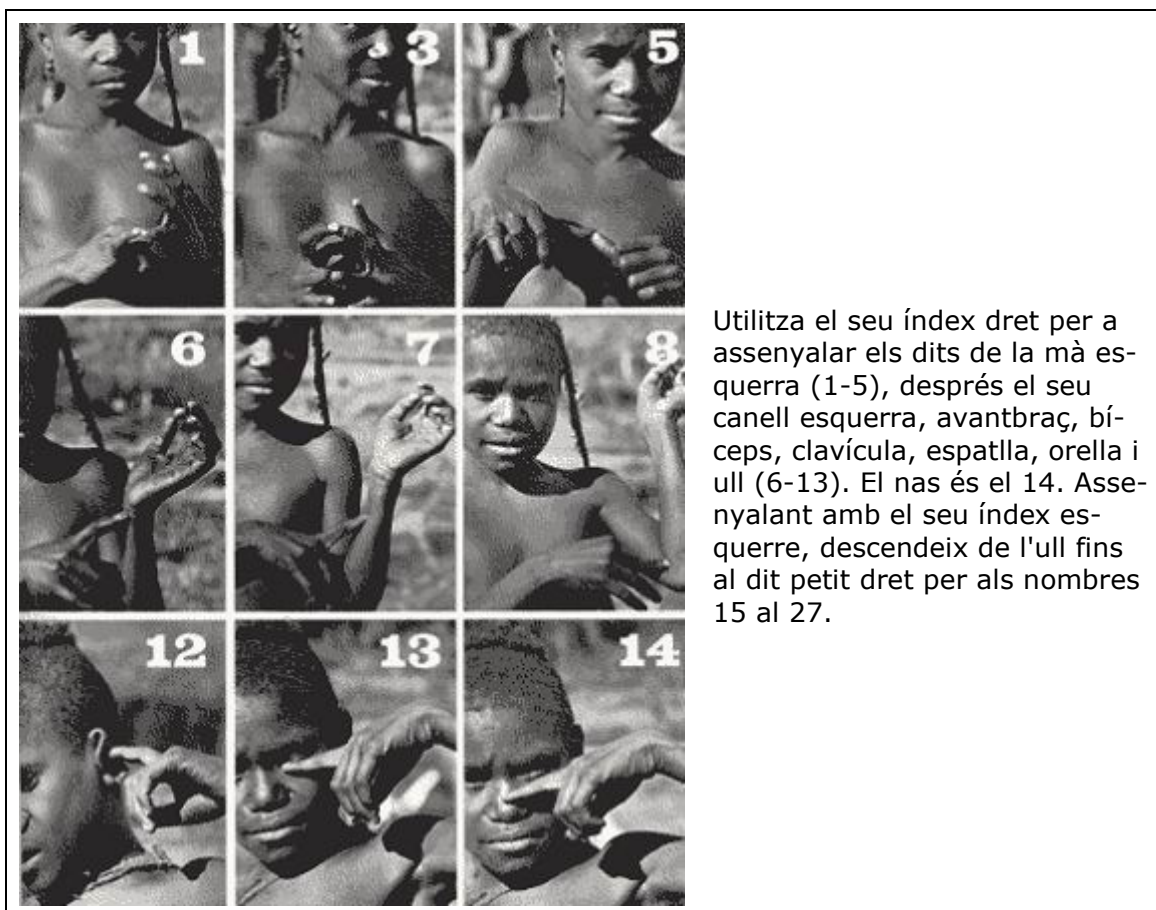
Per acabar, no oblidem la dita: “Tres són multitud”.

Abans de les paraules-nombre: el gest

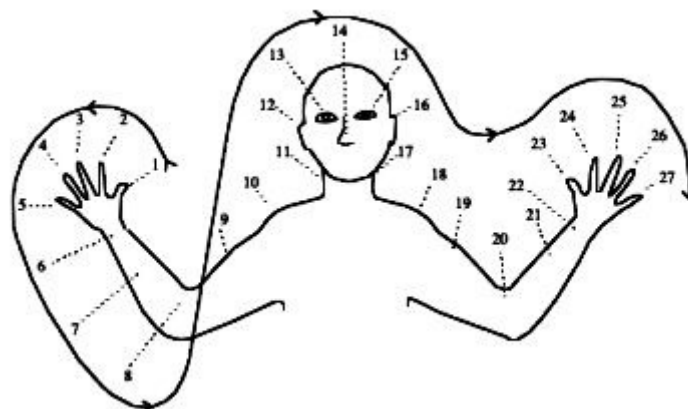
Una de les primeres fases del fet de comptar pot ser de caire *indicatiu*, gestual, sense paraules associades. Es fa tot un seguit de gestos ordenats que ens fan avançar en la sèrie numèrica. Sembla una acció equivalent a la de fer correspondències biunívokes però inclou una idea nova: la necessitat d’un ordre i la comparació d’haver arribat més o menys lluny en la seqüència gestual. El cas més paradigmàtic és el conjunt de sistemes observat entre els aborígens de Papua-NovaGuinea⁵. Hem de dir “conjunt” perquè estudis dels anys 80 del passat segle van descriure més de 250 sistemes diferents (Bishop, 1999). Un que podem observar amb fotografies, però incomplet, el de la tribu *sibiller*⁶ que arribava fins el 27.

⁵ Durant tots els capítols que es parlin sobre formes de comptar i d’anomenar els nombres trobarem molts exemples de la zona de Papua-Nova Guinea. L’orografia, la dispersió en petites illes, el paisatge divers amb grans boscos tropicals i manglars han fet que moltes poblacions indígenes tinguessin poc contacte amb la nostra cultura. Aquest aïllament també s’ha produït entre les pròpies poblacions, amb contactes reduïts entre elles. Això ha provocat l’existència, en una zona tan reduïda, d’unes 800 variants lingüístiques i una gran diversitat de formes de comptar i dir els nombres que, hores d’ara, encara s’estan estudiant.

⁶ Fotografies extretes de BERGAMINI, DAVID (1967): *Matemáticas*. Ofset-Multicolot. Mèxic DF.



Triem-ne un altre per mostrar l'itinerari íntegrament: els dels *oksapnim*. Els aborígens d'aquesta població es van tocar ordenadament les diferents part dels cos, començant pel dit gros de la mà dreta, seguint per l'índex, el del mig, l'anular, el petit, el canell, l'avantbraç, la sofraja del braç, el braç, l'espatlla, el costat del coll, l'orella, l'ull, el nas... i repetint tot el procés "de baixada" pel costat esquerra (ull, orella, coll...)



Amb aquest mètode s'arriba a comptar fins a 27 però hi altres per altres zones de l'illa en que arribant fins als peus s'aconsegueix comptar fins a 68.

Després del gest: la paraula-gest

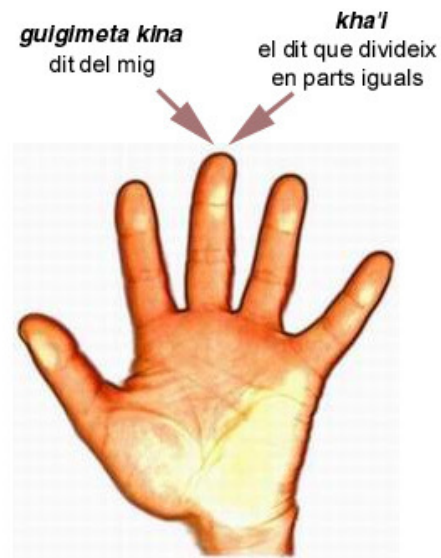
Recollim un text de les memòries de J. B. Boussingault (1802-1887)⁷ en la que descriu un viatge per l'altiplà de Colòmbia:

"Els indis de l'altiplà comptaven amb els dits: els nombres tenien noms fins a deu: 1 *ata* 2 *bosa* 3 *misca* 4 *mughica* 5 *hisca* 6 *ta* 7 *ghupeca* 8 *suhuzo* 9 *aca* 10 *ubchihica*. El 20 tenia una paraula: *gueta*. Quan havien acabat de comptar amb els dits de la mà, continuaven amb els de els peus, col·locant la paraula *quihicha* (peu) abans del nombre, així: *quihicha ata* 11, *quihicha bosa* 12, *quihicha aca* 19, *gueta* 20. Després d'haver arribat al nombre 20, es començava a comptar una altra vintena: *gueta ata* 21. Això fins a formar vint vintenes. En definitiva, els nombres més usats eren: 5 10 15 20 "

Observem que quan els indis *muisca* del relat compten acompanyen gest i paraula. Només un dels mots es tradueix: *gueta* que significa *peu*. No sabem si el significat dels altres està relacionat amb el cos o no. Però, en tot cas, ens podem imaginar com serà una nova fase en les formes de comptar.

En aquesta fase posterior es pot prescindir del gest i dir només el mot que representa el nombre. Els antropòlegs han trobat diferents models d'aquesta manera d'anomenar les quantitats. N'oferim alguns exemples a la taula de la pàgina següent. En molts casos és un pas previ a la *iconicitat* que veurem al següent apartat.

Sabem, per estudis fets als anys 70, que en la majoria de les llengües africanes (i parlem de més d'un miler) la paraula més freqüent per designar el cinc és "mà".



⁷ Es poden llegir aquesta part de les memòries a <http://www.lablaa.org/blaavirtual/historia/memov1/memov6.htm>

Nombre	Bugilai (Nova Guinea)		Chaco (Paraguai)	Zuñis (Nuevo México)		Zulú (Sud-àfrica)	
1	<i>tarangesa</i>	ma esquerra: dit petit	paraula específi- ca	<i>töpinte</i>	disposat a començar	<i>nyi</i>	estat de singu- laritat
2	<i>meta kina</i>	dit següent	paraula específi- ca	<i>kwilli</i>	aixecat amb l'anterior	<i>bili</i>	aixeca un dit separat de la mà
3	<i>guigimeta kina</i>	dit del mig	fet d'u i dos	<i>kha'i</i>	el dit que divideix en parts iguals	<i>tatu</i>	agafar
4	<i>topea</i>	índex	tots dos costats iguals	<i>awite</i>	tots els dits aixecats menys un	<i>ne</i>	?
5	<i>manda</i>	polze	una mà	<i>öpte</i>	el comptat	<i>hlanu</i>	tots els dits de la mà junts
6	<i>gaben</i>	canell	arribat a l'altra mà, u	<i>topalik'ye</i>	un afegit al que s'ha comptat	<i>tatisitupa</i>	agafa el polze dret
7	<i>trankgimbe</i>	colze	arribat a l'altra mà, dos	<i>kwillik'ya</i>	dos portats i aixecats amb la resta	<i>ikombile</i>	assenyala amb l'índex de la ma dreta
8	<i>podei</i>	espatlla	arribat a l'altra mà, fet d'u i dos	<i>khailik'ya</i>	tres portats i aixecats mab la resta	<i>shiya'ngalombile</i>	prescindeix de dos dits de la mà
9	<i>ngama</i>	costat es- querra	arribat a l'altra mà tots dos cos- tat iguals	<i>tenalik'ya</i>	tots, menys un, aixecats amb la resta	<i>shiya'ngalolunye</i>	prescindeix d'un dit de la mà
10	<i>dala</i>	costat dret	acabat totes dues mans	<i>ästem 'thila</i>	tots els dits	<i>shumi</i>	deixa estesos tots (els dits de les dues mans)

Fonts: Ifrah (1997) i Gheverghese (1996)

Nom dels nombres: les icones

Un altre pas, que no té per què ser successiu dels anteriors sinó que pot ser un model de solució alternativa al fet de posar nom als nombres, és el d'assignar *etiquetes* (Gómez, 1989). Per alguns autors aquest pas significa un avenç important: passar de la *indicativitat* a la *iconicitat* (Barriga F. a Alvarado, 2005). Tot i així, com hem vist, molts noms, especialment els que es refereixen a parts del cos, tenen components indicatius.

Un exemple de designació nominal d'aquest tipus seria fer associacions d'aquest tipus:

Nombre	1	2	3	4	5
Nom	Boca	Ulls	Trèvol	Cavall	Mà

Les icones, les etiquetes, mostren una vegada més la dificultat d'assolir determinats graus d'abstracció. De la mateixa manera que costava deslligar el concepte "tres" de "tres hams" o "tres senglars" el fet de mantenir una paraula que dóna una imatge concreta a una cardinalitat abstracta és una altra forma de mantenir un lligam (de fet una dependència) amb "les coses reals". Es proposen models que semblen arrelats encara en la idea de les correspondències biunívokes ("tantes com").

No hi ha, però, tanta abundància d'exemples lingüístics com en els casos anteriors. Tanta és l'escassetat d'exemples que, fins i tot, es pot considerar que, encara que com a idea és plausible, pot ser és anecdòtica. A més, el sistema té limitacions evidents, tant en quant a extensió (fins a quina quantitat s'arribarà) com en icones per determinats nombres.

Martin Gardner (1965, edició de 1984) explica que en maorí la paraula que designa el quatre és "gos" i que la tribu extingida del Abípons, a sud-amèrica, el nom del quatre era el mot que referit als "dits del nyandú" (un exemple que fa dubtar sobre les fonts de les dades, ja que el nyandú només té tres dits). Barriga (a Alvarado, 2005) esmenta altres exemples de diferents llengües americanes:

llengua	nombre	paraula	significat
tupinambà (Brasil)	5	po	mà
takelma (EEUU)	20	yap'ami'es	home
muisca (Colòmbia)	20	geta	casa amb el "conuco" ⁸
maya (Mèxic)	400	jun bak'	un lligat
fox (EEUU)	1000	negutimakakw	una caixa
nàhuatl clàssic (Mèxic)	8000	cenxipiquilli	una bossa

A la llengua *Enga* de Nova Guinea (Rauff, 2003) tenen una curiosa forma de comptar amb cicles de quatre fins a seixanta. Les paraules per u, dos, tres i quatre són *yo-da(n)*, *lepo*, *tepo* i *kitome* de. Després tenen mots pel sis, el set i el vuit, aquest concretament és diu "dues fletxes". A partir del nou comencen els cicles de quatre:

⁸ El *conuco* és un tros de terra destinat al conreu

nou, deu, onze i dotze són “dues fletxes”, “dues fletxes més un”, “dues fletxes més dos” i “dues fletxes *extremes* (gato)”. Amb el mot *gato* s'indica el final del cicle de quatre. Amb el tretze comença un altre cicle nou. Tretze es diu “moniato”.

Enga						
1	9	13	17	21	25	29
<i>yo-dai</i> (n)	<i>tukutepon</i> (ya) yo dai(n)	<i>mapun</i> (ya) yo dai (n)	<i>yupun</i> (ya) yo dai (n)	<i>watakapun</i> (ya) yo dai (n)	<i>paipan</i> (ya) yo dai (n)	<i>yanapun</i> (ya) yo dai (n)
	dues flet- xes+1	moniato+1	terra+1	salvatge+1	va i ve +1	gos+1

Més paraules per comptar més i millor

El gest, el nom del gest, la icona... no ens poden portar gaire lluny a mesura que treballem amb nombres més grans o augmentem el grau de precisió en la designació de quantitats. Aquest aspecte de la precisió no l'hem tractada fins ara però no és una qüestió exempta d'interès.

En termes generals la situacions concretes que ens demanen el treball amb nombres, el context, ens indiquen graus de precisió lingüístiques diferents. No entenem igual les expressions “hi ha 30” que “hi ha *uns* 30”. Fins i tot termes genèrics com “molts” els podem quantificar amb aproximacions diferents. Deu senglars són molts si ens els trobem pel mig de la muntanya, podrem dir que hem vist “molts senglars”. Però deu formigues seran poques; no tindria sentit dir que hem vist “moltes formigues”.

“Com el comptar està relacionat tan estretament amb el comerç, la riquesa, la feina, la propietat i el nivell d'una societat, també està molt relacionat amb els valors socials del grup, i la precisió forma part d'aquesta relació.”

A. Bishop (1999)

En el moment que demanem més precisió ens calen noms que ens ajudin a designar quantitats de qualsevol grandària i sense ambigüitats: “cent disset” serà diferent de “més de cent”.

Totes les llengües disposen de paraules, sufixes, prefixes o alteracions del mot que indiquen aspectes quantificadors, especialment de pluralitat (la “s” final). Cal matissar, però, els mots singulars-plurals que designen objectes amb diferents parts, moltes vegades iguals, com pantalons, ulleres, tisoires, pinces... En àrab, però, es va més enllà del singular i el plural i hi trobem un número lingüístic addicional: el dual. Recordem, a més, el cas esmentat anteriorment del *anindilyakwa* d'Austràlia que tenia encara un quart número lingüístic: el trial. També trobem a la majoria de llengües mots que matisen “graus de pluralitat” (molts/es, pocs/poques, alguns/es, tots/es, cap, ningú/na), o indiquen correspondència (cada, cadascun/a). La pluralitat agafa diferències importants quan parlem d'animals o vegetals. Direm “estol d'ocells” o “ramat d'ovelles” però no direm mai “manat de roses” o “pom d'espàrrecs”. Moltes llengües tenen, a més, paraules indicadores de nombres petits com dos (parell-a, duet, tots dos-totes dues, ambdós-ambdues...) o tres (terna, tercet...) Però les llengües més desenvolupades necessiten, de vegades, fer indicacions numèriques més precises i d'aquí l'ús de prefixes com *mono* per u (monoaural), *bi* o *di* per a dos (dicotomia, bivalve), *tri* per tres (trident)... o més genèrics com *miria* per deu mil (miriàpodes que, curiosament tenen una subclasse anome-

nada quilòpodes i que no tenen 9000 potes menys) o *poli* per “més de tres” en el cas de les síl·labes⁹.

Per comptar amb precisió anem dient successiva i ordenadament els noms dels nombres cada vegada que assenyallem o separem un nou element del conjunt a comptar (a un element li assignem l'*u*, a un altre el *dos*, a un altre el *tres*...). Quan acabem, el darrer nombre pronunciat (oral o mentalment) ens designa la cardinalitat del conjunt. El comptar i el llenguatge estan directament associats en els nostres hàbits de recompte. Però això ho podem fer perquè disposem d'una llengua que ha desenvolupat un sistema complet que ens permet anar tan lluny com vulguem en la sèrie numèrica. Amb un mètode com “un a la mà d'un altre indi” pel 21, o “dos indis” pel 40 dels *tamanacos* sud-americans no arribarem als milions (Gardner, 1965, edició de 1984).

Per tant cal evolucionar a una sistemàtica que ens permeti anomenar qualsevol quantitat¹⁰. Aquesta sistemàtica farà ús de tres eines:

- el concepte de base
- uns morfemes mínims
- les operacions aritmètiques

La fase nova a la que arribem, en la que es comença a formar un llenguatge complex i amb unes normes constructores, ja és *predicativa* i supera les simplicitats indicatives i icòniques¹¹.

Entre els morfemes que es fan servir hi ha fonamentalment, de dos tipus (Crump, 1993): *independents*, que es poden fer servir sols, deslligats (com “set”, “nou”, “catorze” o “cent”) i *dependents*, que només tenen sentit lligats a d'altres (com “di” [disset], “i” [vint-i-quatre] o “tri” [trilions]). Alguns autors diferencien un primer patró marc entre els morfemes independents format pels indispensables per dir els primers nombres (un, dos, tres... setze...), i un segon patró, de vegades anomenat *cíclic*, que inclou les potències de la base amb morfema (cent, mil, milió).

En quant a la inclusió de les operacions en aquesta predicativitat sembla aparèixer gairebé sempre seguint un ordre força clar:

⁹ Si es vol ampliar en aquest tema es pot veure un interessant treball sobre els noms col·lectius en català a la tesis: SOLÉ SOLÉ, ELISABET (2002): *Els noms col·lectius catalans. Descripció i reconeixement*.

http://www.tesisenxarxa.net/TESIS_UPF/AVAILABLE/TDX-1212102-165114//tess1de2.pdf

¹⁰ Al conte **Funes el memorioso** (1942), l'escriptor argentí Jorge Luis Borges ens parla d'un personatge, Ireneo Funes, d'una prodigiosa memòria que vol inventar un sistema de numeració on cada nombre tingui un nom propi. Borges ens presenta aquesta situació absurda per destacar les fantàstiques (i poc útils utilitzades així) capacitats de Funes:

“La voz de Funes, desde la oscuridad, seguía hablando.

Me dijo que hacia 1986 había discurrido un sistema original de numeración y que en muy pocos días había rebasado el veinticuatro mil. No lo había escrito, porque lo pensado una sola vez ya no podía borrarsele. Su primer estímulo, creo, fue el desagrado de que los treinta y tres orientales requieran dos signos y tres palabras, en lugar de una sola palabra y un solo signo. Aplicó luego este disparatado principio a los otros números. En lugar de siete mil trece, decía (por ejemplo) *El Máximo Pérez*; en lugar de siete mil catorce, *El Ferrocarril*; otros números era *Luis Melián Lafinur*, *Olimar*, *azufre*, *los bastos*, *la ballena*, *el gas*, *la caldera*, *Napoleón*, *Agustín de Vedia*. En lugar de quinientos decía *nueve*. Cada palabra tenía un signo particular, una especie de marca; las últimas eran muy complicadas...Yo traté de explicarle que esa rapsodia de voces inconexas era precisamente lo contrario de un sistema de numeración. Le dije que 365 era decir tres centenas, seis decenas, cinco unidades; análisis que no existe en los «números» *El Negro Timateo* o *manta de carne*. Funes no me entendió o no quiso entenderme.”

¹¹ Totes tres fases les podem trobar àmpliament comentades per F. Barriga a (a Alvarado, 2005)

1. addició
2. multiplicació
3. potència
4. resta
5. divisió (molt poc freqüent)

La base

Posteriorment entrarem més a fons en el concepte matemàtic de base i les bases que més s'han fet servir al llarg de la història, però ara ens cal fer-nos una idea per tal d'estudiar els diferents mètodes d'anomenar els nombres.

Les osques a una talla ens són molt útils per fer correspondències biunívokes. Els palets en un full també ens són útils per anotar successos acumulatius que es van esdevenint en moments diferents (ara passa un cotxe vermell, ara un gris, ara un altre de vermell, ara un altre verd...). Però si aquestes marques les utilitzem per fer un recompte posterior, com hem vist al capítol referit al "quadrar", farem agrupacions d'algun tipus. El concepte de *base* apareix quan substituïm les agrupacions de marques per símbols nous, de manera que reduïm la quantitat de símbols utilitzats. Ifrah (1987) explica que a determinades regions de l'Àfrica occidental per comptar els ramats els pastors feien desfilar els animals. Quan passava un enfilaven un petxina o closca en una tira blanca; quan havien passat 10 desfeien la tira blanca i enfilaven una en una tira blava; quan havien posat deu blaves (cent animals) desfeien la blava i enfilaven una nova petxina a una cinta vermella... Per comptar 147 animals no els calien 147 petxines sinó una dotzena: una a la cinta vermella, quatre a la blava i set a la blanca. Aquests pastors han triat una agrupació basada en el 10. Una petxina de la cinta blava són 10 de la blanca; una de la vermella 10 de la blava. Han fet servir la base 10. La base ens estalvia la repetició exacerbada de marques, símbols... Com veurem si la base és petita no ens estalviarà gaires repeticions i si és massa gran serà poc útil.

Noms additius

Imaginem un cas molt extrem: amb el mot *un* podem anomenar qualsevol nombre. El vuit el podem dir "un-un-un-un-un-un-un-un" fent servir un principi additiu. De moment no hem guanyat gaire, el nom és tan gran com el nombre. Però si de cada dos uns fem una paraula per "dos" i la utilitzem recursivament fent convenientment per a cada cas particular sumes de dosos i uns, escurçarem una mica la llargada dels numerals formats. Observem que no fem un ús complet de la base, dos en aquests cas, ja que no hi haurà un nom especial per "dos dosos" (2^2) ni per "dos dos-dosos" (2^4).

A diferents poblacions australianes (Ifrah, 1997) i a la llengua *urupà* del Brasil (Bariga a Alvarado, 2005) fan servir la base dos (amb les limitacions esmentades abans) encara que d'una manera més reduïda: només fins a quatre. Després, a la seva llengua, fan servir genèrics del tipus "molts":

	aranda	illes Murray	oest de l'Estret de Torres	urupà
1	ninta	netat	urapun	munim
2	tara	neis	okosa	pià
3	tara mi nin-ta	neis-netat	okosa-urapun	minin pià
4	tara ma tara	netat-netat	okosa-okosa	...

Els *gumulgal* australians la fan servir (Gheverghese, 1996). Només necessiten dos mots-base: *urapon* i *ukasar*. La resta els obtenen per addició.

1	urapon	5	ukasar-ukasar-urapon
2	ukasar	6	ukasar-ukasar-ukasar
3	ukasar-urapon	7	ukasar-ukasar-ukasar-urapon
4	ukasar-ukasar		

Paga la pena remarcar que, com a la majoria de formes d'anomenar els nombres ens adonem que, excepte a *l'urupà*, les unitats superiors es diuen abans que les inferiors. De la mateixa manera que nosaltres diem les centenes abans que les desenes i aquestes que les unitats, aquí es diuen abans els "dosos" que les unitats.

L'addició està present en la construcció dels numerals pràcticament sempre, tot i que s'incorporin després altre operacions, com veurem als següents apartats. A moltes llengües aquesta es fa palesa amb la incorporació lingüística d'alguna partícula. Observem algunes d'aquestes variants i com es diu 23 a cada llengua:

- "i", segurament la més usada. En català diem "vint-i-tres" i en suahili es diu "ishirini **na** tatu"
- "sobre". En hongarès és "huszon**h**árom" i en gaèlic escocès "trì **air** fhichead"
- "amb". Al quítxua de Cuzco és "iskay chunka kinsa-**yoq**". A l'aymara del Perú "pätunka-kimsa**ni**"
- "més de". En bretó es fa servir només per la desena del vint i 23 és "teir **warn** ugent".

Encara que semblants en els aspectes fonamentals, les solucions trobades per la humanitat són increïblement diverses. No sempre s'ha fet servir una base fixa per compondre els noms dels numerals amb sistemes additius¹². Per exemple, a la llengua *lule* d'Amèrica del Sud ens trobem que el 9 es fa sumant 4+4+1:

1	alapeà	}	9	loquép moilé loquép alapeà
4	loquép			

A l'òpata de Mèxic veiem el set construït amb la suma 1+6

1	seni	}	7	seni-bussani
6	bussani			

Al *tzòtzil*, també de Mèxic, trobem que l'onze es fa sumant 9+2. Aquest "onze" s'aprofitarà també després per construir els noms del 31, el 51...

9	baluneb	}	11	buluchib
2	chib			

Un cas especial d'addició és la duplicació. Sembla un pas previ a incloure una altra operació més complexa com és la multiplicació. Al *kamilaroi* del sud-est australià observem que els sis es construeix amb dos tresos:

3	yuliba	6	yuliba yuliba
---------	--------	---------	---------------

¹² La majoria d'exemples que citarem a partir d'ara, si no s'especifiquen d'una altra manera, estant extrets de Francisco Barriga (a Alvarado, 2005) i de la pàgina web "The number system of the world"

Una duplicació de 2 fa quatre i el quatre forma part del 9 ($5+4$). A tots els numerals acabats en 4 i en 9 (24, 39....) de la llengua *alamblak* (Papua - Nova Guinea) hi trobem la duplicació del dos:

- 2 hosf
 4 hosfihosf
 5 tir yohtt (significa 5 exacte; el 10 és "tir hosf": cinc dos)
 9 tir yohtti hosfihosf

Al francès parlat a França, no a Suïssa o Bèlgica, trobem construccions irregulars com les que afecten als nombres del 70 al 79. Així el 74, per exemple, s'anomena sumant $60+14$: *soixante-catorze*.

La multiplicació entra en joc

Els mètodes additius d'anomenar mostren les seves limitacions a mesura que els nombres es fan més grans. En el moment que les multiplicacions, combinades amb les sumes, passen a jugar un paper en la designació de noms, comencem a entrar en formes més efectives d'assignació que ens permeten anar més lluny en la línia numèrica sense tanta reiteració de mots. Observem l'estructura del *guaraní colonial* del Paraguai:

Guaraní colonial	Nombre	Nom	Càlcul
	4	irundi	4
	5	irundi ari petei	$4+1$
	6	irundi ari mokôi	$4+2$
	7	irundi ari mbohapi	$4+3$
	8	mokôi irundi	$2\cdot 4$
	9	mokôi irundi ari petei	$2\cdot 4+1$
	10	mokôi irundi ari mokôi	$2\cdot 4+2$

Una de les característiques que crida l'atenció és el paper d'un nombre segons el lloc que ocupa. *Mokôi*, dos, multiplica abans d'*irundi*, quatre. Així obtenim el vuit. Però suma si ho posem després, com al cas del sis. Al *guaraní* la base multiplicativa és quatre. Al *quiché* dels Alts de Guatemala es troba una doble base multiplicativa: 20 i 80:

Quiché	Nombre	Nom	Càlcul
	20	hu-vinak	$1\cdot 20$
	40	ca-vinak	$2\cdot 20$
	80	hu-much	$1\cdot 80$
	400	o-much	$5\cdot 80$

Troben molts més exemples que combines diferents bases additives i multiplicatives. La llengua africana *api* esmentada per Ifrah (1997) es basa en el 5.

Api		
Nombre	Nom	Observacions/Càlcul
1	tai	
2	lua	
3	tolu	
4	vari	
5	luna	literalment, "la mà"
6	otai	literalment, "el nou u"
7	olua	literalment, "el nou dos"
8	otolu	literalment, "el nou tres"
9	ovari	literalment, "el nou quatre"
10	lualuna	literalment, "les dues mans"
13	lualuna tolu	$2 \cdot 5 + 3$
15	toluluna	$3 \cdot 5$
17	toluluna lua	$3 \cdot 5 + 2$

Un exemple ja més semblant al nostre pot ser el de la llengua *sukuma* de Tanzània en el que hi ha noms per cada unitat de 1 a 10 i la resta de desenes i nombres intermedis es construeixen multiplicant per la desena corresponent i afegint les unitats. La centena, següent potència de 10, ja tindrà nom propi.

Sukuma				
Nombre	Nom	Nombre	Nom	Càlcul
1	imo	14	ikumi na inne	$10 + 4$
2	ibili	20	makumiabili	$10 \cdot 2$
3	idatu	30	makumiadatu	$10 \cdot 3$
4	inne	43	makumiane na idatu	$10 \cdot 4 + 3$
5	itano	54	makumiatano na inne	$10 \cdot 5 + 4$
6	itandatu	68	makumiatandatu na inane	$10 \cdot 6 + 8$
7	pungate	72	makumipungate na ibili	$10 \cdot 7 + 2$
8	inane	86	makumianane na itandatu	$10 \cdot 8 + 6$
9	kenda	99	makumikenda na kenda	$10 \cdot 9 + 9$
10	ikumi	100	igana	100

Hi ha algun cas en el que verbalment es fa referència a l'operació com el Tok Pisin de Nova Guinea on 23 seria "tupela ten tri", que es podria traduir literalment com "dues vegades deu tres". En danès trobem també que el 60 (i tots els numerals d'aquesta dècada) es diu *tres* que és una abreviació de "tresindstyve" que significa "tres vegades vint". El 80, *firs*, és també l'abreviació de "4 vegades 20" (firsindstyve).

Fem més curts els noms llargs: les potències

De la mateixa manera que la suma es feia servir de forma iterativa, el producte també pot ser utilitzat d'aquesta manera. Però la iteració d'un producte és una nova operació aritmètica: la potència. A la llengua *yoruba* de Nigèria un milió es diu *egbeegberun* que significa "mil vegades mil". Mirem dos exemples més. Al primer només trobem una potència per fer el 100. Al segon el mètode és clarament més recursiu.

	kiliwa (Baixa Califòrnia)	Opera- cions	maripú (Colòmbia)	Opera- cions
1	msíg			
10	chipam msíg		tabis	
100	chipam msíg u' kuniujot chi- pam msíg	10·10	tabis tabis	10·10
1000	chipam msíg u' kuetet msíg		tabis tabis tabis	10·10·10
10000	chipam msíg u' kuetet chi- pam msíg	1000·10		

Arribats aquí, al moment que apareix la idea de potència, el concepte real de base es pot completar i observar que només cal posar noms a unes primeres unitats fins a completar la base. Després només cal "inventar noms" a les potències d'aquesta. Mirem un exemple:

La llengua asteca (Ifrah, 1997) juga amb la base 20. Si l'analitzem trobem mots especials de l'1 al 5, després pel 10, pel 15 i pel 20. Els noms dels nombres sense mot propi compresos entre aquestes quantitats (1 i 20) es formen additivament.

Asteca					
	Nom	Càlcul		Nom	Càlcul
1	ce		11	matlactli-on-ce	10+1
2	ome		12	matlactli-on-ome	10+2
3	yey		13	matlactli-on-yey	10+3
4	naui		14	matlactli-on-naui	10+4
5	chica o macuilli		15	caxtulli	
6	chica-ce	5+1	16	caxtulli-on-ce	15+1
7	chic-ome	5+2	17	caxtulli-on-ome	15+2
8	chicu-ey	5+3	18	caxtulli-on-yey	15+3
9	chic-naui	5+4	19	caxtulli-on-naui	15+4
10	matlactli		20	cem-poualli	

A partir d'aquí, per fer nombres més grans, es combinen multiplicacions i sumes.

Asteca		
Nombre	Nom	Observacions/Càlcul
30	cem-poualli-on-matlactli	20+10
40	ome-poualli	2·20
50	ome-poualli-on-matlactli	2·20+10
100	macuil-poualli	5·20
200	matlactli-poualli	10·20
300	caxtuli-poualli	15·20

Però els asteques eren ja una societat prou avançada i necessitaven treballar amb nombres força grans. Segurament aquesta és una de les raons per la que van por-

tar més lluny el concepte de base i van veure la necessitat de posar un nom especial al 400, primera potència que trobem després de 20^1 .

Asteca		
Nombre	Nom	Observacions/Càlcul
400	cem-tzuntli	1·400
800	ome-tzuntli	2·400
1200	yey-tzuntli	3·400

El *tamil* del sud de la Índia i Sri Lanka dóna un nom especial a cada potència de 10. Vegem algunes:

Tamil		
Nombre	Potència	Nom
10	10^1	paththu
100	10^2	nūru
1 000	10^3	ayiram
10 000	10^4	ayuta
100 000	10^5	laksham
1 000 000	10^6	aksita
10 000 000	10^7	kōdi

No sempre a les potències de la base se li donen noms especials. Normalment es combinen potències i múltiples de potències. És el cas, per exemple, del català, en el que cent mil (10^5) combina els noms de dos altres potències (10^2 i 10^3)¹³. Però també moltes altres llengües resolen el problema així. Al sànscrit del nord de la Índia observem aquest model de construcció:

Sànscrit	
Nombre	Nom
10	daśa
100	śata
1 000	sahasra
10 000	daśasahasra
100 000	śatasahasra

La resta també vol jugar

Analitzant les deferents maneres de posar noms als nombres són poc freqüents els usos de la resta o de la divisió. Però això no significa que no hi hagi alguns casos.

Llengua	Nombre	Nom	Significat
ainu (Japó)	31	sinep ikasma wanpe etu hotnep	1 més 10 de 2 vints
zapotec (Mèxic)	36	cecaayotouabitobi	5 de 2 vints més 1
algunes formes del gal·lès (Gran Bretanya)	96	onid pedwarpum ugain	menys de 4 de 5 vints

¹³ Es torna a veure un principi multiplicatiu: $10^5 = 10^2 \cdot 10^3 = 10^{2+3}$

Un dels més esmentats és el dels *yoruba* (Gheverghese, 1996) de Nigèria que tenen un complex sistema en base 20 que combina addicions i subtraccions. Es pot trobar explicada de força més completa també a Ifrah (1997).

- de l'1 al 10 tenen noms propis com *okan* per 1, 3 *eeta* o *eewa* per 10.
- d'11 a 14 es componen paraules que s'interpreten additivament sobre 10 (*le ewa* o *laa*, afegit a 10). 13 serà *eeta laa*.
- de 15 a 19 s'expressen subtractivament amb expressions con *din logun* on *ogun* vol dir 20. Disset seria (20-3): *eeta din logun*.
- de 21 a 24 es fan addicions a 20; 23 serà *eeta le logun*.
- de 25 a 29 com a subtraccions de 30 (*ogbon*).
- de 35 a 40 fa subtraccions de "dos vints".
- es van fent múltiples de 20 fins arribar a "deu vints" (2000) i els nombres intermedis combinen principis subtractius.

Podem observar alguns exemples de les descomposicions que es fan per anomenar determinades quantitats encara que no sempre hem trobat totes les dades per omplir la taula:

Yoruba			
Nombre	Nom	Significat	Càlcul
45	aarun din eewa dinogún eeta	5 de 10 de 3 vints	$3 \cdot 20 - 10 - 5$
78	mejidologorin	2 de 4 vints	$4 \cdot 20 - 2$
300	oodunrun		$20 \cdot (20 - 5)$
318			$400 - 4 \cdot 20 - 2$
350	ogún eeji dinnirinwó odin mewaa	2 vints des de 400 menys 10	$400 - 2 \cdot 20 - 10$
525			$3 \cdot 200 - 4 \cdot 20 + 5$

Fins on sabem al *yoruba* modern s'han simplificat alguns noms i els 300 ja no es converteix en $20 \cdot 15$ sinó en $5 \cdot 20 \cdot 3$ (*ogorun meta*), tot i mantenir principis subtractius quan les unitats estan entre 5 i 9.

Gheverghese argumenta que el sistema *yoruba* està molt relacionat amb la manera de fer els recomptes en les transaccions econòmiques fent servir determinades petxines.

Tot i així no cal anar tan lluny per trobar vestigis de la incorporació de la resta en altres numeracions. Al llatí clàssic, per exemple, trobem que els nombres amb 8 o 9 unitats tenien una forma alternativa d'anomenar-se en la que es manifestava una diferència. Per exemple 28 es podia dir *duodetriginta* (2 de 30) i 79 *undeoctoginta* (1 de 80).

Si volem un vestigi encara més clar, i proper, el tenim en la forma catalana de dir les hores. Així el que en moltes llengües serien "les sis i quart" en la nostra és "un quart de set". En alemany també es diuen algunes hores d'una manera semblant. Per exemple, les 19:45 es diuen com a Catalunya "tres quarts de vuit" (*dreiviertel acht*). Altres casos són una mica diferents: "dos quarts d'una" es diu "*halb zwei*" (la meitat de dos). El castellà fa un ús explícit de la resta: "son las ocho menos cuarto".

La divisió

Acabem de veure, parlant de la forma de dir les hores a l'alemany, com apareix la divisió. Aquesta operació és molt estranya entre les solucions trobades per dir els numerals. Un cas conegut és el del danès.

Danès			
Nombre	Nom	Abreviació	Operació
50	halvtredsindstyve	halvtreds	½ de 3 vegades 20
60	tresindstyve	tres	3 vegades 20
70	halvfjerdsindstyve	halvfjerds	½ de 4 vegades 20
80	firsindstyve	firs	4 vegades 20
90	halvfemsindstyve	halvfems	½ de 5 vegades 20

La *mitja centena* surt a algunes llengües, com al gal·lès on 50 es diu "mig cent" (hanner cant) i al *garífuna* de Guatemala (dimí san). Al *chatino* d'Oaxaca el 150 és diu "un cent i meitat" (sha siento kla'be). Podem intuir que el "siento" del *chatino* no sembla una paraula pròpia d'aquesta llengua sinó una incorporació del castellà. Les llengües són vives i canvien. Segurament molts dels numerals que hem presentat pateixen contaminacions d'aquests tipus. Havíem comentat ja el cas del *yoruba*. No és l'única dissonància entre diferents fonts que hem trobat en aquesta recerca.

Algunes rareses

A molts lloc del món s'ha fet servir la base vint. Com veurem més endavant la trobarem forçant irregularitats en els constructors dels numerals d'algunes llengües. Com si els primers recomptes no passessin de vint, trobem també algunes irregularitats sorprenents en la forma d'anomenar els nombres entre onze i vint.

Un exemple d'aquesta mena de formes arcaiques el trobem al finès o a l'estonià. En finès el 13 es diu "kolmetoista" i en estonià "kaksteist". Tots dos casos es poden traduir com "tres del segon".

Però si volem trobar una forma encara més inusual, que sembla afectada per l'adquisició de la numeració escrita tal com la fem ara (sistema posicional en base 10 amb zero) podem veure el *séneca* dels indis iroquians dels EEUU que al 13 li diuen "së skáe", literalment "tres-ú". D'aquesta manera anomenen tots els nombres de la desena (onze = u-u, dotze=dos-u...).

Un altre cas especial que cal esmentar, perquè és l'únic cas que coneixem, és el de l'àrab antic on tots els numerals (menys les desenes) tenen una forma masculina i una altra femenina (que s'aplica, per tant, a les unitats finals). Pensem que en castellà aquesta característica només es reserva a l'*u* i en català a l'*u* i al *dos*. Així en àrab antic el 52 masculí és "ithnatâni wa khamsûn" i el femení "ithnân wa kham-sûn".

En català, si us plau

En català comptem amb un sistema organitzat ja d'una forma força econòmica. El trobem analitzat a la taula de la pàgina següent seguint progressivament el sistema de construcció del nombres:

Nombres	Descripció	Exemples	Termes/ prefixos
de l'1 al 16	Tenim noms especials per cada nombre. De l'onze al setze la primera part del nom recorda les unitats que s'afegeixen a la desena.	3 ~ tres 12 ~ dotze (2+10)	16 termes
17 a 19	Construïm els noms afegint un prefix que indica deu: di-sset, di-vuit, di-nou	18 ~ divuit (10+8)	1 prefix
20 a 99	Els noms de les desenes, tot i recordar un cert principi multiplicatiu entre unitats i desenes (trenta~3·10, seixanta~6·10), els considerarem com a mots independents. Un cas especial és del vint que no recorda fonèticament la seva relació amb el dos. Aquests mots ens ajuden a formar tots els nombres de 20 a 99 fent composicions additives.	47=40+7 quaranta-set 58=50+8 cinquanta-vuit	9 termes
100	Nom especial per la segona potència de la base: <i>cent</i>		1 terme
101 al 999	Construïm els noms combinant principis multiplicatius (amb les centenes) i additius (amb les desenes i les unitats).	473 = 4·100+70+3 quatre-cents setanta-tres 999 = 9·100+90+9 nou-cents noranta-nou	
1 000	Nom especial per la tercera potència de la base: <i>mil</i>		1 terme
1 001 a 999 999	Fem una descomposició del nom en dos blocs: diem quants milers tenim (tal com s'anomenava d'1 a 999) afegint "mil" i continuem anomenant la part de nombre no dita. És a dir, combinem principis multiplicatius i additius.	435872 [(4·100+30+5)·1000]+[8·100+70+2] quatre -cents trenta-cinc mil vuit-cents setanta dos	
1 000 000	Nom especial per la sisena potència de la base: <i>milió</i>		1 terme
1 000 001 a 999 999 ₁ 999 999	Construcció en dos blocs: el posterior de 6 xifres i l'anterior amb les que queden, seguint, pel milió, els principis explicats anteriors.	54 321 ₁ 704 849 [54 321] milions + [704 849]	
Del bilió a l'infinit	Anem agrupant de sis en sis des de la dreta afegint prefixos a <i>lió</i> com <i>bi</i> (2), <i>tri</i> (3), <i>quatri</i> (4), <i>quinti</i> (5), <i>sexti</i> (6)		6,7,8...

Si observem, fins al milió, tenim vint-i-set noms especials i un conjunt de prefixos pels nombres 17, 18 i 19 i pels les potències de 10 d'exponent múltiple de 6 a partir de 10^{12} (força clàssics: bi, tri, ...). Fins i tot es podria reduir la quantitat de mots en vuit si considerem, per exemple, *trenta* derivat de *tres* o *seixanta* de *sis*: hauríem d'afegir només el sufix *(a)nta*.

L'origen dels nostres numerals

Els nostres mots per designar els nombres provenen del llatí. La semblança amb altres llengües llatines és força clara.

	Llatí	Català	Castellà	Gallec	Portuguès	Aranès	Francès	Italià	Romànes
1	unus	ú	uno	un	un	un	un	uno	unu
2	duo	dos	dos	dous	dois	du	deux	due	doi
3	tres	tres	tres	tres	três	tres	trois	tre	trei
4	quattor	quatre	cuatro	catro	quatro	quate	quatre	quat-tro	patro
5	quinque	cinc	cinco	cinco	cinco	cinc	cinq	cinque	cinci
6	sex	sis	seis	seis	seis	sies	six	sei	s'ase
7	septem	set	siete	sete	sete	sèt	sept	sette	s'apte
8	octo	vuit	ocho	oito	oito	ueit	huit	otto	opt
9	novem	nou	nueve	nove	nove	nau	neuf	nove	nouâ
10	decem	deu	diez	dez	dez	dètz	dix	dieci	ceze

Els numerals de l'onze al setze també tenen el seu origen en contraccions de mots llatins

	11	12	13	14	15	16
l'latí	undecim	duodecim	tredecim	quattordecim	qūindecim	sedecim
català	onze	dotze	tretze	catorze	quinze	setze

Els noms de les desenes (trenta, quaranta...) deriven clarament dels numerals unitaris excepte el vint (veinte, vingt, venti, vinte... o viginti en llatí) que poc a veure té amb el dos.

Si mirem altres llengües d'origen indoeuropeu trobem moltes semblances fonètiques entre les paraules que designen els primers nombres.

	Anglès	Alemanys	Suec	Bretó	Gal·lès	Grec	Búlgar	Rus	Urdú
1	one	eins	ett	unan	un	éka	edín	odín	ek
2	two	zwei	två	daou	dau	dhío	dva	dva	do
3	three	drei	tre	tri	tri	tría	tri	tri	teen
4	four	vier	fira	pevar	pedwar	téssera	chétiri	chietuirie	chaar
5	five	fünf	fem	pemp	pump	pénde	pet	pyat	paanch
6	six	sechs	sex	c'h-wec'h	chwech	éksi	sesht	shest	chuuch
7	seven	sieben	sju	seizh	saith	eftá	sédem	syem	saat
8	eight	acht	åtta	eizh	wyth	oxtó	ósem	vosiem	aath
9	nine	neun	nio	nav	naw	ennéa	dévet	dyevit	nau
10	ten	zehn	tio	dek	deg	dhéka	déset	dyesit	dus

L'origen comú de totes aquestes paraules el trobem en el que es coneix com a *protoindoeuropeu*, una llengua originària comuna a la família de llengües que es parlen a Europa i gran part de l'Àsia sud-oriental. Aquesta llengua comuna prototip ha estat reconstruïda pels lingüistes a partir d'estudis comparatius entre llengües antigues i modernes i es pensa que es parlava fa uns cinc mil anys. La reconstrucció dels numerals fa aquestes propostes per cada nombre:

	Protoindoeuropeu
1	oinos
2	duwo
3	treyes
4	kwetwores
5	penkwe
6	sweks
7	septm
8	okto
9	newn
10	dekm

Una de les llengües que més pes van tenir en la reconstrucció del protoindoeuropeu va ser el sànscrit, llengua dels textos clàssics hindús, que ens ajudarà a desxifrar el misteri del numeral "vint". Trobem que en aquesta llengua aquest nombre es diu *vimsanti*, paraula que, a la vegada, deriva de *visati* (dvi-daśati = dues dotzenes) (Ifrah, 1997).

Crida l'atenció observar com els noms dels numerals semblen haver patit en tot aquests temps poques modificacions. Si mirem els exemples anteriors amb detall veurem que les diferències auditives no són tantes com amb altres paraules. Per exemple, podem comparar les formes del mot *arbre* en diferents llengües indoeuropees.

Català	Anglès	Alemany	Finès	Italià	Gal·lès	Grec	Rus	Urdu
arbre	tree	baum	puu	albero	coeden	δέντρο (dentro)	ban	darakht

No hi ha cap part del llenguatge que resulti més susceptible al préstec lingüístic i a la difusió cultural que els numerals. Això explica en part no només per què és tan difícil seguir la pista als orígens lèxics dels numerals, sinó també per què els numerals tenen, intrínscament, a estar tan poc relacionats amb altres parts del vocabulari.

Crump (1999:67)

Els numerals en euskera confirmarien, per la seva llunyania fonètica, la hipòtesi de que es tracta d'una llengua d'origen no indoeuropeu.

	Euskera		
1	bat	6	sei
2	bi	7	zazpi
3	hiru	8	zorrti
4	lau	9	beredatzi
5	bost	10	hamar

Inventem una manera de formar els numerals

Si ara ens haguéssim d'inventar un mètode per construir els numerals d'una forma pràctica, clara, ordenada i econòmica... com ho faríem? Segurament no variaria gaire del que tenim ara:

- faríem servir la base 10
- ens basaríem en el sistema posicional; en un model polinòmic
- combinariem principis additius i multiplicatius reduint la quantitat de paraules a aprendre. Segurament podríem passar bàsicament amb les unitats d'1 a 9.
- triaríem algunes de les potències de la base per assenyalar determinats graus claus de magnitud dels nombres.
- el llegiríem d'unitats grans a petites per saber clarament el seu grau de magnitud.

Hi hagut una llengua que s'ha plantejat aquest problema i l'ha resolt d'una manera ben diferent, curiosa però poc efectiva: el *tongà*, parlat a les illes Tonga. Tenen una paraula per les unitats de l'1 al 9 i paraules especials per les potències de 10 (10, 100...) que, per cert, no sempre fan servir. Després diuen els nombres xifra per xifra, com quan diem un telèfon sense agrupar les xifres.

Tonga				
Nombre	Nom	Nombre	Nom	Traducció
0	noa	11	taha taha	1,1
1	taha	17	taha fitu	1,7
2	ua	24	ua fa	2,4
3	tolu	30	tolu noa	3,0
4	fa	46	fa ono	4,6
5	nima	59	nima iva	5,9
6	ono	61	ono taha	6,1
7	fitu	72	fitu ua	7,2
8	valu	89	valu iva	8,9
9	iva	98	iva valu	9,8
10	hongofulu -o bé-taha noa (u-zero)	100	teau -o bé-taha noa noa	1,0,0

El nombre 456 708 es diria "quatre-cinc-sis-set-zero-vuit". No sabríem el seu ordre de magnitud fins a veure'l escrit o si anem comptant les xifres. En català, en canvi, a la quarta partícula ja sabríem que es parla de centenars de milers.

Però hi ha una llengua moderna que sí s'ha plantejat la qüestió amb tota la seva complexitat: *l'esperanto*, un idioma artificial inventat a finals del segle XIX i que pretenia ser una segona llengua unificadora (com ho ve ara a ser l'anglès pels no

anglo-parlants). Un dels objectius del seu inventor era facilitar el seu aprenentatge a qualsevol persona amb qualsevol llengua d'origen. Per tant el va estructurar de manera que combinés una quantitat relativament curta d'arrels per formar les paraules amb combinacions lògiques de prefixos o sufixos. El model triat pels numerals, que no es distancia gens de les pautes que havíem assenyalat al començament però que redueix lleugerament la quantitat de morfemes especials, és el següent:

Esperanto				
Nombre	Nom	Nombre	Nom	Càlcul
0	nul	11	dek unu	$10+1$
1	unu	17	dek sep	$10+7$
2	du	24	dudek kvar	$2 \cdot 10+4$
3	tri	30	tridek	$3 \cdot 10$
4	kvar	46	kvardek ses	$4 \cdot 10+6$
5	kvin	59	kvindek naŭk	$5 \cdot 10+9$
6	ses	61	sesdek unu	$6 \cdot 10+1$
7	sep	72	sepdek du	$7 \cdot 10+2$
8	ok	89	okdek naŭk	$8 \cdot 10+9$
9	naŭk	98	naŭkdek ok	$9 \cdot 10+8$
10	dek	100	cent	

Tal grau de simplificació existia ja, però, en llengües vives, no artificials, com el *cantonès* de la Xina que, com veurem quan parlem d'escriptura numèrica, es relaciona d'una manera claríssima amb el seu registre escrit de les quantitats.

Cantonès				
Nombre	Nom	Nombre	Nom	Càlcul
0	ling	11	sap yat	$10+1$
1	yat	17	sap chat	$10+7$
2	yi	24	yi sap sei	$2 \cdot 10+4$
3	saam	30	saam sap	$3 \cdot 10$
4	sei	46	sei sap luk	$4 \cdot 10+6$
5	ng	59	ng sap gau	$5 \cdot 10+9$
6	luk	61	luk sap yat	$6 \cdot 10+1$
7	chat	72	chat sap yi	$7 \cdot 10+2$
8	baat	89	baat sap gau	$8 \cdot 10+9$
9	gau	98	gau sap baat	$9 \cdot 10+8$
10	sap	100	yat baak	

Resum

Arriba un moment en que la humanitat no té prou amb la comparació de quantitats (més-menys-igual) sinó que li cal contestar d'un manera precisa a la pregunta "quants". També, paral·lelament, observa cicles a la natura i comença a celebrar determinats rituals que imposen el concepte d'ordre. A partir d'aquestes dues idees neix el nombre natural en un doble vessant: com a *cardinal* i com a *ordinal*. No hi ha massa acord sobre quina de les dues visions del nombre va ser anterior.

Quant tenim **nombre** l'hem d'anomenar; necessitem el llenguatge. L'enumeració nominal dels nombres, a més, ens ajuda a realitzar l'acció del recompte. Es pot comptar, tanmateix, sense necessitat d'un vocabulari complet que acompanyi al comptatge. En una primera fase es podia comptar ajudant-se del cos. Aquesta seria una forma *indicativa*. Hi ha vestigis d'això en els models de recompte corporal dels aborígens de Papua-Nova Guinea. Un altre vestigi és la quantitat de llengües que fan referència als dits de la mà o a gestualitzacions en els noms dels seus numerals. Però la substitució del gest pel mot indica un grau d'abstracció superior. Per tant, podem considerar que s'ha entrat en una segona fase: la *iconicitat*. Hi ha altres numerals que inclouen paraule-imatge, com el maorí o a la llengua del abípons d'Amèrica del Nord.

Aquestes dues fases (indicativitat-iconicitat) no poden portar molt lluny en la numeració. Per tant, cal avançar a un altre sistema més complet que permeti dir tots els nombres d'una manera precisa i abundant (de màximes grandàries). Per construir aquest sistema, que alguns autors anomenen fase predicativa, es fan servir tres eines:

- determinació d'una base per fer agrupaments de quantitats.
- una llista de morfemes mínims.
- ús de les operacions aritmètiques (amb aquesta seqüència ordenada: suma, multiplicació, potència i, més estranyament, resta i divisió).

Hi ha una gran diversitat de formes de dir els numerals fent servir les eines anteriors. Així trobem bases com la 2, la 5, la 10, la 20... però, fins i tot, la 4 o la 6. També trobem un esquema bàsic d'ús de les operacions molt semblants però amb moltes irregularitats locals. La nostra llengua, que té una sistemàtica general força senzilla (dintre de la complexitat), funciona bàsicament amb base 10, té, fins al milió, 19 morfemes (quatre per potències de 10), un sufix i un conjunt de prefixos utilitzats pel bilió, trilió... Les operacions que utilitza són la suma, el producte i, en certa manera, la potència. Té una anomalia sostractiva en la forma de dir les hores. A altres llengües, com el cantonès o l'esperanto, hi ha mètodes de construcció dels numerals que poden reduir encara una mica més la quantitat de morfemes eliminant petites irregularitats com els nombres de l'onze al setze o la de la forma d'anomenar les desenes, utilitzant una construcció multiplicativa (dient, per exemple, "tres-deu" en comptes de "trenta").